



حدیجه اقدامی مقدم
دبیر ریاضی بندر انزلی

تعبیر با هم فرق می‌کنند. در عمل، وجود برداشت‌های متفاوت از یک جمله، اجتناب‌ناپذیر است و ممکن است رخ دهد. چنین حالتی برای مسائل مطرح در مبحث احتمالات بیشتر رخ می‌نماید. زیرا حل درست مسئله منوط به برداشت درست و منظور نظر سؤال طرح شده است. به این مثال دقت کنید:

• «در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ۲ مهره زرد وجود دارد. از کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که مهره‌ها با هم متفاوت باشند.»

دانش‌آموزان کلاسی به این سؤال به دو صورت پاسخ داده‌اند. این دو پاسخ را با هم ببینیم:

پاسخ اول:

مهره‌ها متفاوت باشند، یعنی یکسان نباشند. بنابراین از متمم پیشامد استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

A' پیشامد مهره‌های یکسان $A \rightarrow$ پیشامد مهره‌ها متفاوت

$$n(A') = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$$

$$\rightarrow P(A') = \frac{5}{84} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{84} = \frac{79}{84} \rightarrow P(A) = \frac{79}{84}$$

پاسخ دوم:

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

از هر رنگ یکی $A \rightarrow$ پیشامد مهره‌ها متفاوت

یا
یکسان
نبودن
مسئله این است!

گاهی برداشتی که از یک عبارت می‌شود، معانی متفاوتی را در ذهن افراد مختلف متبادر می‌سازد. مثلاً ممکن است از جمله «من خوبم»، یک نفر چنین برداشت کند که حال و روز نویسنده خیلی روبه‌راه است و دیگری چنین دریابد که حال نویسنده چندان بد نیست. عالی هم نیست، ولی قابل تحمل است. این دو

دوبه‌دو متفاوت اضافه کرد. یعنی اگر مطلوب سؤال یکسان نبودن سه مهره و هم‌رنگ نبودن سه مهره باشد، می‌توانیم این حالت‌ها را در نظر بگیریم:

= هم‌رنگ نبودن سه مهره = یکسان نبودن ۳ مهره = A
 «دو مهره هم‌رنگ و یک مهره ناهم‌رنگ»، یا «۳ مهره هر کدام از یک رنگ باشند».

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{24 + 55}{84} = \frac{79}{84}$$

اگر سؤال مربوط به یکسان نبودن سه مهره را از راه پیشامد متمم حل کنیم، خواهیم داشت:

یکسان نبودن ۳ مهره = A'
 هر ۳ آبی یا هر ۳ قرمز = یکسان بودن ۳ مهره = $A' \rightarrow$
 می‌دانیم هر ۳ زرد (امکان ندارد)

$$P(A') = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{84}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{84} = \frac{79}{84}$$

مشاهده می‌شود که احتمال یکسان (هم‌رنگ) نبودن ۳ مهره از بین حداقل سه رنگ متفاوت، برابر است با احتمال متفاوت بودن ۳ مهره به‌صورت دوبه‌دو یا شباهت دو مهره و متفاوت بودن مهره دیگر. به‌عبارت دیگر، یکسان نبودن ۳ مهره می‌تواند دو منظور را شامل شود که هر دو منظور، مفهوم یکسان نبودن ۳ مهره را تأیید می‌کند. شاید برای دانش‌آموز، درک این تفاوت‌ها کار ساده‌ای نباشد و شاید بهتر بود صورت سؤال اولیه به‌صورت‌های زیر درمی‌آمد:

● احتمال آن را بیابید که ۳ مهره دوبه‌دو متفاوت باشند.

یا:

● احتمال آن را بیابید که سه مهره متفاوت از هر نظر داشته باشیم.

اکنون می‌خواهیم جواب سؤال اولیه را از طریق

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 2 \times 3 \times 4 = 24,$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{84}$$

چرا جواب‌ها متفاوت‌اند؟ به نظر شما کدام جواب درست است؟ و اگر یکی از آن‌ها درست نیست، دلیل چه می‌تواند باشد؟ آیا متفاوت بودن همیشه دلیل بر یکسان نبودن است؟ آیا می‌شود از سه مهره، دو مهره مثل هم باشند و مهره دیگر فرق کند و در این حالت بگوییم مهره‌ها متفاوت‌اند؟ یا بهتر است صورت سؤال اصلاح شود و به تفاوت دوبه‌دو اشاره مستقیم کند؟

آیا در حل چنین سؤال‌هایی مجاز به حل از طریق پیشامد متمم هستیم؟ و اگر بله، متمم آن دقیقاً کدام پیشامد است؟

اگر صورت سؤال تغییر می‌کرد و جمله انتهایی، احتمال یکسان نبودن مهره‌ها را طلب می‌کرد، کدام پاسخ درست بود؟

بیا یک‌بار دیگر مسئله را مرور کنیم. قرار است ۳ مهره از بین ۹ مهره رنگی (۴ قرمز، ۳ آبی و ۲ زرد) به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از قضا این مهره‌ها با هم متفاوت باشند. حال می‌خواهیم ببینیم چقدر احتمال دارد این اتفاق بیفتد.

فضای نمونه‌ای و کل حالت‌هایی که ممکن است برای انتخاب تصادفی ۳ مهره از بین ۹ مهره رخ دهد، برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

حال اگر قرار باشد این سه مهره متفاوت باشند، یعنی هیچ شباهتی به هم نداشته باشند، باید از سه رنگ متفاوت موجود باشند؛ یعنی یکی قرمز، یکی آبی و یکی زرد.

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 24 \rightarrow P(A) = \frac{24}{84}$$

منطقی به‌نظر می‌رسد که تفاوت مهره‌ها دوبه‌دو فرض شود. یعنی هیچ دو مهره‌ای یکسان نباشند. اما اگر بگوییم «احتمال آن را بیابید که مهره‌ها یکسان نباشند»، در این وضعیت، می‌توان آن حالت شک‌برانگیز شباهت دو مهره و فرق با مهره دیگر را نیز به حالت سه رنگ



اما در یک حالت متفاوت بودن دقیقاً معادل یکسان نبودن است و آن زمانی است که دو رنگ انتخابی داشته باشیم و دو مهره انتخاب کنیم. به این مثال دقت کنید:

● ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی داریم. ۲ مهره به تصادف از بین آنها انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال آنکه ۲ مهره متفاوت باشند، چقدر است؟

ب) احتمال آنکه مهره‌ها یکسان نباشند، چقدر است؟

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

→ A پیشامد یکسان نبودن مهره‌ها (ب) هر دو قرمز یا هر دو آبی = A' یکسان بودن مهره‌ها

$$P(A') = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

مشاهده می‌شود که هر دو جواب مثل هم هستند. در این نوشتار سعی کردیم اهمیت واژه‌ها در طرح و حل سؤالات ریاضی و به‌خصوص مبحث احتمال را پررنگ‌تر نشان دهیم.

پیشامد متمم به‌دست آوریم.

A = پیشامد متفاوت بودن سه مهره با هم (بدون

شبهت بین سه مهره)

A' = وجود شبهت بین سه مهره

(دو مهره یکسان و یک مهره متفاوت، یا یکسان

بودن سه مهره) =

$$P(A') = \frac{\left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\right) + \left(\binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}\right)}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{5+55}{84} = \frac{60}{84}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{60}{84} = \frac{24}{84}$$

پرسش‌های بیکار جو!

معادله $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) صفر

ب) ۱

ج) ۲

د) ۳

ه) ۴